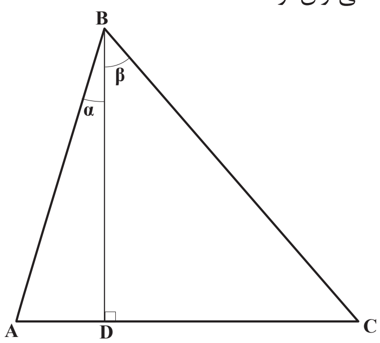
عباس قلعه‌پور اقدم، دبیر ریاضی ارومیه

اشاره

در شـــمارهٔ ۱۰۲ «مجلهٔ برهان متوسطهٔ ۲» (اردیبهشت ۹۶)، مقاله‌ای با عنوان «یک اثبات آسان از اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$» داشتیم که در آن نویســـنده، آقای *امین کشاورز از شیراز*، با فرض حاده بودن α و β، اثباتی جالب و ســـاده براســـاس تشـــابه مثلث‌ها و با تکیه بر *«قضیهٔ ســـینوس‌ها»*[1] و قضیهٔ تصویر برای اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ ارائه کرده بودند که مراجعهٔ علاقه‌مندان به آن و مطالعهٔ این مقاله خالی از لطف نیست. در این مقاله نیز (در تکمیل) بـــه چند مورد دیگر از چنین اثبات‌هایی می‌پردازیم. لیکن باید توجه داشـــت که با ایـــن روش‌ها اثبات کلی قضایای مجموع (قضایای مربوط به نمایش جبـــری توابع مثلثاتی مجموع) یا تفاضل (دو کمان برحســـب توابع مثلثاتی هر یک از کمان‌ها) انجام نمی‌گیرد، زیـــرا این قضایا برای هر مقدار دلخواه α و β صحیح هستند، نه برای مقادیر خاصی که در چنین اســـتدلال‌های هندسی در نظر گرفته می‌شوند. در واقع این استدلال‌های هندسی را باید به‌عنوان تعبیرهای قضایای مجموع برای شرایط خاص تلقـــی کرد که حاصل آن مرور دانســـته‌های هندسی و برخی روابط و قضیه‌های مثلثاتی است.

اثبات ۱

α و β را زاویه‌های دلخواه حاده فرض می‌کنیم. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم که در آن اندازهٔ زاویهٔ B برابر $\alpha+\beta$ باشد، به نحوی که BD (ارتفاع وارد بر ضلع AC) بـــا اضـــلاع AB و BC به‌ترتیـــب زاویه‌هـــای α و β را بســـازد. طول BD را h و طول اضلاع مثلث را به‌صورت AB=c، AC=b و BC=a در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل ۱ می‌توان نوشت:



شکل ۱.

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}a.c.\sin(\alpha+\beta)\quad (1)$$

می‌دانیم که مســـاحت مثلث برابر اســـت با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.

از طرف دیگر داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{ABD}}+S_{\overset{\Delta}{BDC}}\quad (2)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$S_{\overset{\Delta}{ABD}}=\frac{1}{2}AD.h \quad \text{و} \quad S_{\overset{\Delta}{BDC}}=\frac{1}{2}CD.h$$

و نیز از تعریف سینوس و کسینوس برابری‌های زیر به وضوح برقرارند:

$$CD=a.\sin\beta \quad \text{و} \quad h=a.\cos\beta=c.\cos\alpha \quad \text{و}$$
$$AD=c.\sin\alpha$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_{\overset{\Delta}{ABD}}=\frac{1}{2}a.c.\sin\alpha.\cos\beta\quad (3)$$

$$S_{\overset{\Delta}{BDC}}=\frac{1}{2}a.c.\cos\alpha.\sin\beta\quad (4)$$

از برابری‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) داریم:

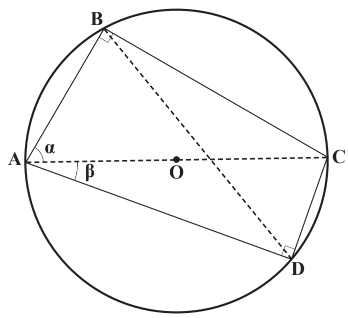
$$\frac{1}{2}a.c.\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}a.c.(\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta)$$

از تقسیم طرفین بر $\frac{1}{2}ac$، نتیجه حاصل می‌شود.

اثبات ۲

حاصل اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ را می‌توان از «**قضیهٔ بطلمیوس**» هم به‌دست آورد. به موجب این قضیه در هر چهارضلعی محاطی حاصل‌ضرب دو قطر برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های اضلاع روبه‌رو. حال به منظور استفاده از قضیهٔ بطلمیوس، α و β را زاویه‌های حاده فرض می‌کنیم و چهارضلعی ABCD را طوری در دایره محاط می‌کنیم که قطر AC از چهارضلعی بر قطری از دایرهٔ محیطی منطبق باشد (شکل ۲). اگر شعاع دایرهٔ محیطی را R فرض کنیم، خواهیم داشت: AC=۲R.
حال طبق قضیهٔ بطلمیوس داریم:

$$AC.BD = AB.CD + BC.AD \quad (1)$$



شکل ۲.

مثلث‌های ABC و ACD قائم‌الزاویه‌اند (چرا؟) و داریم:

$$AB = 2R.\cos\alpha \quad و \quad CD = 2R.\sin\beta$$

$$AD = 2R.\cos\beta \quad و \quad BC = 2R.\sin\alpha$$

همچنین با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت:

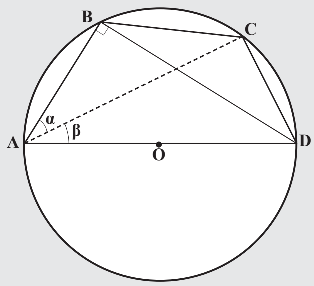
$$BD = 2R.\sin(\alpha+\beta)$$

با قرار دادن پنج برابری اخیر در رابطهٔ (۱) و ساده کردن طرفین به $2R^2$ رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$

تمرین:

با استفاده از قضیهٔ بطلمیوس و با روش مشابه آنچه که در مورد $\sin(\alpha+\beta)$ انجام شد، می‌توان $\sin(\alpha-\beta)$ را هم تعبیر کرد. انجام آن را با توجه به شکل ۳ به‌عنوان تمرین برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم.



شکل ۳.

پی‌نوشت

۱. قضیهٔ سینوس‌ها: در هر مثلث غیرمشخص، نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویهٔ مقابل آن برابر است با قطر دایرهٔ محیطی آن مثلث.

منابع

۱. قراگوزلو، جلیل ا... (۱۳۷۴). **مثلثات پایه**. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ شانزدهم.

۲. کشاورز، امین (۱۳۹۶). «یک اثبات آسان از اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$». مجلهٔ برهان ریاضی متوسطهٔ دوم. شمارهٔ ۱۰۲. دورهٔ ۲۶.

۳. نووسلو، سرگی ایوسیفویچ (۱۳۶۵) **مثلثات مستقیم‌الخط و کروی**. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر. تهران. چاپ دوم.